УДК 512.542.6

Вик. Д. Мазуров

ГРУППЫ С ЗАДАННЫМ СПЕКТРОМ*

Для группы G обозначим через $\pi(G)$ множество тех простых чисел p, для которых G содержит элемент порядка p, а через $\omega(G)$ – *спектр* G, т. е. множество порядков элементов из G. Это множество является некоторым подмножеством множества натуральных чисел, к которому, возможно, добавлен символ ∞. Спектр замкнут относительно делимости натуральных чисел и для конечных групп однозначно определяется множеством $\mu(G)$ максимальных по делимости элементов из $\omega(G)$.

Группа G из класса $\mathcal{C}$ называется *распознаваемой* в $\mathcal{C}$ по спектру $\omega(G)$ (для краткости – *распознаваемой* в $\mathcal{C}$), если любая группа $H \in \mathcal{C}$, для которой $\omega(H) = \omega(G)$, изоморфна G. Другими словами, G распознаваема в $\mathcal{C}$, если $h_{\mathcal{C}}(G) = 1$, где $h_{\mathcal{C}}(G)$ – число попарно неизоморфных групп $H \in \mathcal{C}$, *изоспектральных* группе G, т. е. имеющих тот же спектр, что и G. Для класса $\mathcal{F}$ всех конечных групп вместо $h_{\mathcal{F}}(G)$ будем использовать обозначение $h(G)$. Конечную группу G назовем *n-значно распознаваемой* или *n-распознаваемой*, если $h(G) = n < \infty$, и *нераспознаваемой*, если $h(G) = \infty$. Однозначно распознаваемую группу обычно называют *распознаваемой*, а n-распознаваемую группу при $\infty > n > 1$ – *почти распознаваемой*. В 1980-х годах Ши доказал распознаваемость нескольких конечных простых групп [73, 81], и эти результаты положили начало широкому направлению исследований распознаваемости групп. К настоящему времени в этом направлении получено большое количество результатов, рассеянных по многочисленным работам. Цель настоящей статьи – дать краткий обзор исследований, связанных с проблемой распознаваемости групп. Автор благодарен А. В. Васильеву и А. С. Кондратьеву за помощь в достижении этой цели.

1. Предварительные факты

Следующая простая лемма показывает, что конечная группа, обладающая нетривиальной разрешимой нормальной подгруппой, нераспознаваема.

*Работа поддержана РФФИ (проект № 05-01-00797), грантом президиума СО РАН (№ 86-197), грантом программы «Университеты России» (№ УР.04.01.028), грантом программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (№ 511), а также Советом по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект № НШ-2069.2003.1).

Лемма 1.1. ([26]) *Если конечная группа G обладает нетривиальной элементарной абелевой нормальной подгруппой V, то G нераспознаваема.*

Доказательство. Обозначим период группы V через p. Пусть G_1 – естественное полупрямое произведение V на G, где действие G на V определяется сопряжением. Утверждается, что $\omega(G_1) = \omega(G)$. Очевидно, $\omega(G) \subseteq \omega(G_1)$. Пусть$(g, v) \in G_1$, $g \in G$, $v \in V$ и пусть n – порядок Vg в G/V. Если $V \ni u = g^n \neq 1$, то порядок $(g, v)^n = (u, *)$ равен p, а порядок (g, v) равен порядку g. Если $g^n = 1$ и $1 \neq (g, v)^n = (1, vv^g \cdots v^{g^{n-1}})$, то $(gv)^n = vv^g \cdots v^{g^{n-1}} \neq 1$, откуда следует, что порядки (g, v) и gv равны. Так как G_1 содержит нетривиальную элементарную абелеву нормальную подгруппу, то возможно бесконечное повторение описанного процесса, что и доказывает лемму.

В частности, любая распознаваемая конечная группа заключена между прямым произведением нескольких простых неабелевых групп и его группой автоморфизмов.

Попытка усилить лемму 1.1 заменой условия коммутативности V на условие, что период V принадлежит спектру V [43], оказалась несостоятельной. В [25] показано, что расширение прямого поизведения V двадцати трех групп Сузуки $Sz(128)$ посредством подгруппы порядка 143 из симметрической группы степени 23, действующей на V перестановками сомножителей, удовлетворяет этому модернизированному условию, но тем не менее распознаваемо. Любопытно, что может быть распознаваемым и прямое произведение двух одинаковых простых групп [25]. Заметим, что в доказательствах приведенных фактов не используется давно анонсированная, но только недавно полностью доказанная теорема о классификации конечных простых групп [34, 35]. Большинство же цитируемых в настоящем обзоре результатов, решающих проблему распознаваемости для тех или иных простых или почти простых групп (группа называется почти простой, если она содержит единственную минимальную нормальную подгруппу и эта подгруппа проста), опирается на классификационную теорему.

2. Распознавание почти простых групп

Ниже в табл. 1–3 приведен список почти простых групп, для которых к настоящему времени решен вопрос о их распознаваемости. Мы используем обозначения из [44], ставшие к настоящему времени общепринятыми.

Таблица 1

Известные почти простые распознаваемые группы

G	Условия на G	Библиография
A_n	$n = 5, 16, p, p+1, p+2, p \geq 7$ простое	[18, 22, 24, 38, 46, 71, 76, 93]
S_n	$n = 9, 12$, или $n > 5, n$ простое, или $50 < n < 100$ и $n-1$ простое	[17, 24, 38, 66, 71]
$L_2(q)$	$q > 3, q \neq 9$	[36, 72–75, 79]
$M_{10} = A_6.2_3$		[38]
$PGL_2(q)$	$q > 9$ не простое	[42, 67, 68]
$L_3(q)$	$q = 2^m$ или $3 < q \equiv 3, 11 \pmod{12}$ или $q = p^r \equiv 1 \pmod 6$, p простое, r не делится на 3	[19, 30, 33, 59, 60, 81, 100]
$L_3(4).2_1$		[38]
$L_4(3)$		[59]
$L_5(3)$		[46]
$L_n(2)$	$n = 5, 6, 7, 8, 12$ или n простое, $n \nmid 2^k - 1$ для всех $k < n-1$	[47, 65, 66, 90, 92]
$L_n(2^m)$	$n = 2^k \geq 32$	[12]
$U_3(2^m)$	$m \geq 2$	[30, 33, 83]
$U_n(q)$	$(n, q) \in \{(3, 9), (3, 11), (4, 3), (6, 2)\}$	[1, 29, 82, 84, 89, 90]
$S_4(q)$	$q = 3^{2m+1} > 3$	[29]
$S_6(3)$		[29]
$S_{2^m}(2)$	$m \geq 4$	[11]
$O_8^-(2)$		[91]
$O_{2^m+2}^-(2)$	$m \geq 3$	[11, 91]
$O_{10}^+(2)$		[14]
$Sz(2^{2m+1})$		[80]
${}^3D_4(2)$		[29]
$G_2(3^m)$		[8, 59]
$G_2(4)$		[29]
${}^2G_2(3^{2m+1})$		[37]
$F_4(2^m)$		[13, 29]
${}^2F_4(2^{2m+1})$	$m > 1$	[49]
${}^2F_4(2)'$		[59]
${}^2E_6(2)$		[29]
Спорадическая группа	$G \neq J_2$	[58, 64, 79, 85–89]

Таблица 2

Известные k-распознаваемые группы, $k > 1$

Изоспектральные группы	k	Библиография
$\{L_3(p^{3^r n})\langle \rho^{3^k}\rangle \mid p$ простое, $p^{3^r n} \equiv 1 \pmod 6$, $r \geq 1,\ 3 \nmid n$, ρ – полевой автоморфизм порядка 3^r, $k = 0, 1, \ldots, r\}$	r+1	[19, 100]
$G = L_3(q), G.2 = G\langle\gamma\rangle, q \equiv 5, 9 \pmod{12}$, γ – графовый автоморфизм G	2	[19, 23, 43, 100]
$G = L_6(3)$ или $G = U_4(5)$, $G.2 = G\langle\gamma\rangle$, γ – графовый автоморфизм G	2	[9]
$S_6(2)$, $O_8^+(2)$	2	[24, 91]
$O_7(3)$, $O_8^+(3)$	2	[91]

Таблица 3

Известные нераспознаваемые почти простые группы

G	Условия на G	H	Библиография
S_5		$2^4 : A_5$	[38]
A_6		$2^4 : A_5$	[38]
S_6		$2^4 : A_5$	[38]
S_8		$2^6 : A_8$	[71]
A_{10}		$(7^4 \times 3^{12}) : (2.L_2(5).2)$	[26]
$PGL_2(9)$		$3^4 : 5 : 8$	[68]
$PGL_2(p)$	$p > 3$, p простое	$p^{2p-2}.L_2(p)$	[42]
$L_3(3)$		$13^4 : (2.S_4)$	[29, 78]
$PGL_n(p^r)$	p, n простые нечетные, $n \mid p-1, n^2 \nmid p-1, p \nmid r$	$p \times L_n(p^r)$	[26]
$U_3(3)$		$2^{12} : U_3(3)$	[26]
$U_3(5)$		$2^{18} : L_3(4)$	[26]
$U_3(7)$		$2^{42} : U_3(7)$	[26]
$U_4(2)$		$3^4 : S_5$	[26]
$U_5(2)$		$3^5 : M_{11}$	[26]
$S_4(q)$	$q = 3$	$3^4 : S_5$	[26, 59, 90]
	$q = 2^m, m > 1$	$2^{8m} : L_2(q^2)$	[30]
	$q = 3^{2m}$	$3^{28m} : L_2(q^2)$	[29]
	$q = p^m, p > 3$ простое	$p^{8m} : (L_2(q^2).2)$	[26, 29, 30]
$S_8(2)$		$2^8 : O_8^-(2)$	[63]
$O_8^-(2).2$		$2^8 : O_8^-(2)$	[63]
J_2		$2^6 : A_8$	[64, 71]

В столбце H табл. 3 указано композиционное строение одной из групп, изоспектральных группе G и содержащих нетривиальную абелеву нормальную подгруппу. По лемме 1.1 из существования одной такой группы вытекает нераспознаваемость группы G. Ниже описывается точное строение группы H в тех случаях, когда табл. 3 не дает полной информации.

Пусть V – фактор-модуль подстановочного модуля степени 5 для A_5 над полем порядка 2 по одномерному подмодулю и H – полупрямое произведение V на A_5. Тогда $\omega(S_5) = \omega(S_6) = \omega(H)$.

Пусть V – естественный двумерный модуль для $SL_2(4) \simeq A_5$ над полем порядка 4 и H – полупрямое произведение V на $SL_2(4)$. Тогда $\omega(H) = \omega(A_6)$.

Пусть V – 6-мерный композиционный фактор подстановочного модуля степени 8 для A_8 над полем порядка 2 и H – полупрямое произведение V на A_8. Тогда $\omega(S_8) = \omega(H)$.

Пусть $\overline{S}$ – подгруппа $L_2(5^2)$, изоморфная S_5, и S – ее прообраз в $SL_2(5^2)$. Он является расширением группы порядка 2 посредством S_5, обладающим единственной инволюцией. Кроме того, S содержит подгруппу L индекса 2, изоморфную $SL_2(5)$. Группа L изоморфна подгруппе группы $SL_2(7^2)$, поэтому естественный $SL_2(7^2)$-модуль V размерности 2 над полем порядка 7^2 можно рассматривать как точный L-модуль. Пусть $W = V^S$ – S-модуль, индуцированный модулем V, R – нормализатор в S подгруппы X порядка 5. Тогда R – полупрямое произведение группы X на циклическую подгруппу, порожденную элементом y порядка 8, индуцирующим в X автоморфизм порядка 4. Пусть A – одномерный R-модуль над конечным полем порядка 9, точный на $< y >$, и $B = A^S$ – соответствующий индуцированный S-модуль. Для естественного полупрямого произведения $H = (W \times B) : S$ справедливо равенство $\omega(A_{10}) = \omega(H)$.

Группа $GL_2(9)$ содержит подгруппу $L = 5 : 8$, которая действует свободно на естественном двумерном $GL_2(9)$-модуле V над полем порядка 9. Для естественного полупрямого произведения $H = V : L$ справедливо равенство $\omega(PGL_2(9)) = \omega(H)$.

Пусть $L = L_2(p)$, p – нечетное простое число, $p \geq 5$. В [40] показано, что L обладает таким неприводимым модулем V степени $p-1$ над $\mathbb{C}$, что все элементы порядка p из L действуют на V без неподвижных точек, а элемент порядка $(p+1)/2$ фиксирует каждый вектор в некотором ненулевом подпространстве из V. Пусть W – редукция V по модулю 2. Если $(p-1)/2$ четно, то для полупрямого произведения $H = WL$ справедливо равенство $\omega(PGL_2(p)) = \omega(H)$. Если $(p-1)/2$ нечетно, то по [7] существует нерасщепляемое расширение H модуля W посредством L. Для него $\omega(PGL_2(p)) = \omega(H)$.

Группа $SL_2(13)$ содержит подгруппу $L \simeq SL_2(3)$, которая действует свободно на естественном двумерном $SL_2(13)$-модуле W над полем порядка 13. Пусть U – расширение L посредством группы порядка 2, обладающее единственной инволюцией (такое расширение существует: см. выше абзац, посвященный нераспознаваемости A_{10}) и V – модуль для U, полученный индуцированием с модуля W, рассматриваемого как L-модуль. Для естественного полупрямого произведения $H = V : U$ справедливо равенство $\omega(L_3(3)) = \omega(H)$.

Группа $U_3(3)$ обладает абсолютно неприводимым 6-мерным модулем W над конечным расширением поля рациональных чисел (см. [44]). Редукция U по модулю 2 является $U_3(3)$-модулем V над полем порядка 4. Пусть H – расщепляемое расширение V посредством $U_3(3)$. Тогда $\omega(U_3(3)) = \omega(H)$.

Пусть $L = L_3(4)$, V – абсолютно неприводимый 9-мерный L-модуль над полем порядка 4 (см. [56]) и H – расщепляемое расширение V посредством L. Тогда $\omega(U_3(5)) = \omega(H)$.

Пусть $L = U_3(7)$, U – абсолютно неприводимый обыкновенный L-модуль размерности 42 с характером $\chi = \chi_2$ в обозначениях [44], V – 2-редукция модуля U и H – естественное полупрямое произведение группы V на L. Тогда $\omega(L) = \omega(H)$.

Пусть W – подстановочный модуль над 3-элементным полем для группы $S = S_5$, т.е. модуль с базой $w_1, \dots, w_5$, на которой любая подстановка $\pi \in S$ действует по правилу: $w_i\pi = w_{i\pi}, i = 1, \dots, 5$. Пусть V – тензорное произведение модуля $W/\langle w_1 + \dots + w_5\rangle$ на нетривиальный одномерный S-модуль, H – естественное полупрямое произведение модуля V на S. Тогда $\omega(U_4(2)) = \omega(H)$. Отметим, что $U_4(2) \simeq S_4(3)$.

Пусть $M = M_{11}$ и V – абсолютно неприводимый 5-мерный M-модуль над конечным полем порядка 3 с характером Брауэра, значения которого представлены в следующей таблице (см. [56]).

g^M	1A	2A	4A	5A	8A	8B	11A	11B
$\chi(g)$	5	1	-1	0	$-1+\sqrt{-2}$	$-1-\sqrt{-2}$	$-1+\sqrt{-11}$	$-1-\sqrt{-11}$

Если H – расщепляемое расширение V посредством M, то $\omega(U_5(2)) = \omega(H)$.

Пусть F – конечное поле порядка $q = p^n > 3$, где p – простое число, и $W_i = W_i(q)$, $i = 0, 1, \dots, p-1$, – пространство однородных полиномов степени i от переменных x_1, x_2 над F. Пусть α – автоморфизм F, отображающий каждый элемент из F в его p-ю степень. Для $j = 0, \dots, n-1$ превратим W_i в $SL_2(q)$-модуль $W_i^j = W_i^j(q)$, полагая для полинома $f(x_1, x_2) \in W_i$ и матрицы $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL_2(q)$

$$f(x_1, x_2)a = f(a_{11}^{\alpha^j}x_1 + a_{12}^{\alpha^j}x_2, a_{21}^{\alpha^j}x_1 + a_{22}^{\alpha^j}x_2).$$

В частности, W_0^j – тривиальный одномерный $SL_2(q)$-модуль. Модули

$$W(i_0, \ldots, i_{n-1}) = \bigotimes_{j=0}^{n-1} W_{i_j}^j$$

составляют полное множество попарно неэквивалентных абсолютно неприводимых $SL_2(q)$-модулей над полем характеристики p. Если q нечетно, то центр группы $SL_2(q)$ действует тривиально на $W(i_0, \ldots, i_{n-1})$ (и поэтому $W(i_0, \ldots, i_{n-1})$ является $L_2(q)$-модулем) в точности тогда, когда $i_0 + \cdots + i_{n-1}$ есть четное число. Пусть $L = L_2(q^2)$.

Если $q = p^n$, где $p > 3$ – простое число, то положим $V = W_1^0 \otimes W_1^n$. Пусть σ – полевой автоморфизм порядка 2 группы L. Определим действие σ на $W_1^0 \otimes W_1^n$ правилом $(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_i \otimes x_j))\sigma = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_j \otimes x_i)$. Тем самым V превращается в $\overline{L}$-модуль, где $\overline{L} = L\langle\sigma\rangle$. Для естественного полупрямого произведения $H = V\overline{L}$ имеет место равенство $\omega(H) = \omega(S_4(q))$.

Если $q = 3^{2m}$, то положим $V = W_1^{2m} \otimes W_1^{2m+1} \otimes W_2^0$. Пусть $H = VL$ – естественное полупрямое произведение V на L. Тогда $\omega(H) = \omega(S_4(q))$.

Если $q = 2^n$, где $n > 1$, то положим $V = W_1^0 \otimes W_1^n$. Пусть $H = VL$ – естественное полупрямое произведение V на L. Тогда $\omega(H) = \omega(S_4(q))$.

Пусть V – естественный 8-мерный модуль для $L = O_8^-(2)$ над полем порядка 2 и $H = VL$ – естественное полупрямое произведение V на L. Тогда $\omega(H) = \omega(S_8(2)) = \omega(O_8^-(2).2)$.

Пусть W – 8-мерный подстановочный модуль для $A = A_8$ над полем порядка 2, V – 6-мерный композиционный фактор W и H – расщепляемое полупрямое произведение V на A. Тогда $\omega(H) = \omega(J_2)$.

Из результатов, перечисленных в табл. 1–3, вытекают, в частности, следующие факты.

1. Простые группы $L_2(q)$ распознаваемы при $q \neq 9$. Группа $L_2(9) \simeq A_6$ нераспознаваема [36].

2. Группы $PGL_2(q)$ нераспознаваемы, если q – простое число или $q = 9$. В остальных случаях каждая из них распознаваема [42].

3. Простые группы с абелевыми силовскими 2-подгруппами распознаваемы [37].

4. Вопрос о распознаваемости каждой из групп $L_3(q)$ решен. Окончательный ответ содержится в [19].

Пусть $L = L_3(q)$, где $q = p^k$, p – простое число. Если $q \equiv 1 \pmod 6$, то $h(L) = r + 1$, где k делится на 3^r, но не делится на 3^{r+1}, и $\omega(G) = \omega(L)$

тогда и только тогда, когда $L \le G \le L\langle\rho\rangle$, где ρ – полевой автоморфизм L порядка 3^r. Если $q \equiv 5, 9 \pmod{12}$, то $h(L) = 2$ и $\omega(L) = \omega(L.2)$, где $L.2$ – расширение L посредством группы, порожденной графовым автоморфизмом L. Если q четно или $3 < q \equiv 3, 11 \pmod{12}$, то L распознаваема. Группа $L_3(3)$ нераспознаваема.

В частности, $h(L_3(7^{3^r})) = r + 1$ для любого $r \ge 0$. Это означает, что $h(G)$ может принимать любое наперед заданное значение для подходящей конечной группы G (решение вопроса 13.63 из [31]). По-видимому, существование такого же рода примеров следует ожидать и в классе групп, единственным неразрешимым композиционным фактором которых является одна из простых групп $U_3(q)$.

5. Решен вопрос о распознаваемости каждой из простых групп $S_4(q)$ (см. табл. 1–3).

6. Пусть G – конечная простая неабелева группа такая, что $4t \notin \omega(G)$ для всех натуральных чисел $t > 1$. Тогда либо G изоморфна A_7, A_8, J_1; $L_2(2^m)$, $m > 1$; $L_2(q)$, q – степень простого числа, $3 < q \equiv \pm 3 \pmod 8$; ${}^2G_2(3^{2m+1})$, $m > 1$; ${}^2B_2(2^{2m+1})$, $m \ge 1$; $L_3(2^m)$, $m \ge 1$ или $U_3(2^m)$, $m > 1$, и G распознаваема, либо G изоморфна A_6 или $S_4(2^m)$, $m > 1$, и G нераспознаваема [30].

7. Пусть G – конечная неабелева простая группа, простые делители порядка которой не превосходят числа 13. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

(а) группа G изоморфна A_n, $n = 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16$, $L_2(q)$, $q = 7, 8, 11, 13, 25, 27, 49, 64$, $L_3(4)$, $L_4(3)$, $L_5(3)$, $U_3(4)$, $U_4(3)$, $U_6(2)$, $G_2(3)$, $G_2(4)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, $Sz(8)$, M_{11}, M_{12}, M_{22}, HS, Suz, Fi_{22} или M^cL, и G распознаваема;

(б) группа G изоморфна A_6, A_{10}, $L_3(3)$, $U_3(3)$, $U_3(5)$, $U_4(2)$, $U_5(2)$, $S_4(5)$, $S_4(7)$, $S_4(8)$ или J_2, и G нераспознаваема;

(в) группа G изоморфна $L_3(9)$, $L_6(3)$, $U_4(5)$, $S_6(2)$, $S_6(3)$, $O_7(3)$, $O_8^+(2)$ или $O_8^+(3)$ и $h(\omega(G)) = 2$ [9].

8. Решена проблема распознаваемости для простых групп, спектр которых не содержит числа 6 [33] или чисел, больших, чем 20 [59].

3. Граф Грюнберга–Кегеля

Спектр $\omega(H)$ конечной группы H определяет так называемый *граф простых чисел* или *граф Грюнберга–Кегеля* $GK(H)$, вершинами которого служат все простые делители порядка H, и два простых числа p, q смежны, если H содержит элемент порядка pq. Обозначим через $s = s(H)$ число компонент связности графа $GK(H)$, а через $\pi_i = \pi_i(H)$ – i-ю компоненту связности,

$i = 1, \ldots, s$. Если порядок группы H четен, положим $2 \in \pi_1$. Обозначим через $\omega_i = \omega_i(H)$ множество, состоящее из $n \in \omega(H)$ таких, что каждый простой делитель числа n принадлежит π_i.

У большинства конечных простых групп, для которых решен вопрос о их распознаваемости, граф Грюнберга–Кегеля несвязен (до последнего времени исключение составляли только нераспознаваемая A_{10}, распознаваемая A_{16} и почти распознаваемая $L_6(3)$; сейчас известно бесконечно много распознаваемых групп G с несвязным графом $GK(G)$ [12]). Как правило, доказательство результатов о распознаваемости конкретных групп G с несвязным графом $GK(G)$ опирается на следующую теорему, полученную Грюнбергом и Кегелем. Ее доказательство опубликовано в [98].

Теорема 3.1. *Если G – конечная группа с несвязным графом $GK(G)$, то верно одно из следующих утверждений:*

1) *$s(G) = 2$, G – группа Фробениуса, т. е. G содержит нетривиальную нормальную нильпотентную холлову подгруппу A и $C_G(a) \leq A$ для любого неединичного $a \in A$;*

2) *$s(G) = 2$, G – двойная группа Фробениуса, т. е. $G = ABC$, где A, AB – нормальные подгруппы в G, B – нормальная подгруппа в BC и AB, BC – группы Фробениуса.*

3) *Существует такая неабелева простая группа P, что*

$$P \leq \overline{G} = G/K \leq Aut(P)$$

для некоторой нильпотентной нормальной $\pi_1(G)$-подгруппы K из G и $\overline{G}/P$ является $\pi_1(G)$-группой. Более того, граф $GK(P)$ несвязен, $s(P) \geq s(G)$ и для любого числа i, $2 \leq i \leq s(G)$, существует j, $2 \leq j \leq s(P)$, такое, что $\omega_i(G) = \omega_j(P)$.

В частности, G обладает самое большее одним неразрешимым композиционным фактором.

Простые группы с несвязным графом Грюнберга–Кегеля перечислены в [21, 98]. Итоговые таблицы, в которых устранены опечатки и неточности предыдущих списков, содержатся в [29].

В [2] показано, что конечная простая группа, изоспектральная группе Фробениуса или двойной группе Фробениуса, изоморфна одной из групп $L_3(3)$, $U_3(3)$, $S_4(3)$. Так как каждая из этих трех групп нераспознаваема, то при решении вопроса о распознаваемости простой группы H с несвязным графом $GK(H)$ можно считать, что для любой группы G, изоспектральной H, выполнено утверждение 3 теоремы 3.1, и поэтому процесс распознавания H

естественно разбить на три этапа: а) определить список простых групп P с $s(P) \geq s(H)$, для которых $\omega(P) \subseteq \omega(H)$ (из классификации конечных простых групп следует, что этот список конечен); б) для каждой такой P определить список групп A, для которых $P \leq A \leq Aut(P)$ и $\omega(A) \subseteq \omega(H)$ (этот список также конечен); в) для каждой такой A решить вопрос о существовании нетривиальной нильпотентной группы K, некоторое расширение которой посредством A изоспектрально H. Если K с такими условиями существует хотя бы для одной группы A, то H по лемме 1.1 нераспознаваема, а в противном случае H распознаваема или почти распознаваема: $h(H)$ совпадает с числом групп A из списка «б», которые изоспектральны H.

Для любой конечной группы число компонент связности ее графа Грюнберга–Кегеля не превосходит шести [21, 98].

До последнего времени единственной известной простой группой со связным графом простых чисел была группа A_{16} [18]. Недавно была найдена бесконечная (по двум параметрам – размерности и порядку поля) серия таких простых групп [12]. Отметим еще, что все знакопеременные группы $G = A_n$, $n > 6$, с несвязным графом $GK(G)$ распознаваемы [18, 22].

В [62] (эта работа содержит неточности, замеченные и исправленные в [97]) перечислены простые группы, для которых компонента связности графа простых чисел, содержащая число 2, является кликой (полным графом). Отметим, что для любой конечной простой группы G с несвязным графом $GK(G)$ любая компонента связности, не содержащая число 2, является полным графом. Это установлено в [21,98] с помощью теоремы о классификации конечных простых групп. Работа [96] содержит доказательство этого факта, не использующее классификацию.

В препринте [97] получены удобные арифметические критерии смежности вершин графа $GK(G)$ для всех конечных простых групп G. Там же показано, что $GK(B_n(q)) = GK(C_n(q))$.

Связям между графами Грюнберга–Кегеля подгрупп группы автоморфизмов простой группы G, содержащих G, посвящена работа [61].

В заключение этого раздела приведем один свежий результат А. В. Васильева [10], который вместе с критерием смежности вершин в графе $GK(G)$ для простых групп G [97] открывает новые перспективы для решения проблемы распознаваемости, поскольку его условиям удовлетворяет очень широкий класс конечных простых групп (например, все группы $L_n(q)$ при $n \geq 4$).

Теорема 3.2. *Пусть H – конечная группа, удовлетворяющая следующим двум условиям:*

(a) *максимальное число $t(H)$ попарно несмежных вершин (т. е. максимальный порядок коклики) в $GK(H)$ не меньше трех;*

(б) *максимальное число* $t_2(H)$ *попарно несмежных вершин в* $GK(H)$*, среди которых есть число* 2 *(т. е. максимальный порядок коклики, содержащей* 2*), не меньше двух.*

Тогда существует конечная простая неабелева группа S*, для которой* $S \leq \overline{H} = H/K \leq \mathrm{Aut}(S)$*, где* K *– некоторая разрешимая нормальная подгруппа из* H*. Кроме того,* $t(S) \geq t(H) - 1$ *и выполнен один из следующих двух пунктов:*

(1) $S \simeq A_7$ *или* $L_2(q)$ *для некоторого нечетного числа* q*, и* $t(S) = t_2(S) = 3$*;*

(2) *для любого простого числа* $p \in \pi(H)$*, не смежного с* 2 *в* $GK(H)$*, силовская* p*-подгруппа из* H *изоморфна силовской* p*-подгруппе из* S*. В частности,* $t_2(S) \geq t_2(H)$*.*

Отметим еще, что $t(G) \geq 3$ для любой конечной простой группы G со связным графом простых чисел за исключением A_{10} [62]. Кроме того, для всех неабелевых простых групп G, отличных от знакопеременных, $t(2, G) \geq 2$ [97].

4. Квазираспознаваемые группы

Конечная неабелева простая группа G называется *квазираспознаваемой*, если любая конечная группа, изоспектральная G, обладает единственным неабелевым композиционным фактором и этот фактор изоморфен G [4]. Очевидно, что распознаваемая группа является квазираспознаваемой и доказательство квазираспознаваемости является необходимым этапом в установлении распознаваемости. Более того, нетрудно установить, что квазираспознаваемая группа G с несвязным графом Грюнберга–Кегеля нераспознаваема тогда и только тогда, когда существует такой абсолютно неприводимый G-модуль V над конечным полем, что естественное полупрямое произведение VG изоспектрально G.

Простые группы G с тремя и более компонентами связности графа $GK(G)$ квазираспознаваемы, за исключением группы A_6 [4, 5]; кроме того, ни одна из них не является почти распознаваемой [15].

В [11] показано, что группы $S_{2^m}(2^k), m > 3$ и $O_n^-(2^k), n = 2^m$, квазираспознаваемы при любом k. В [3, 6] доказана квазираспознаваемость групп $F_4(q)$ для нечетного q и групп ${}^3D_4(q)$ для произвольного q. Квазираспознаваемы и группы $O_n^-(2^k)$, где $q = 2^k$; k, n – натуральные числа и $n \geq 16$ четно [10].

С квазираспознаваемостью связан и следующий известный вопрос Ши [77]: верно ли, что конечная группа, порядок и спектр которой совпадают с порядком и спектром данной конечной простой группы G, изоморфна G? Понятно, что для любой квазираспознаваемой простой группы этот вопрос решается положительно. К настоящему времени положительный ответ на него известен для всех простых групп, за исключением симплектических групп над полями нечетных характеристик и некоторых серий ортогональных групп (подробнее см. в [99]).

5. Группы, распознаваемые в классе всех групп

Этот параграф посвящен ответу на следующий вопрос: существует ли нетривиальная (бесконечная) группа, распознаваемая по спектру в классе всех групп? Конечно, любая такая группа обязана быть периодической, поскольку если G содержит элемент бесконечного порядка, то $\omega(G) = \omega(G \times X)$ для любой группы X без кручения. Следующий результат дает первые примеры конечных простых групп, распознаваемых в классе всех групп.

Теорема 5.1. ([16]) *Каждая из групп $L_2(2^m)$, $m > 1$, распознаваема в классе всех групп.*

Доказательство использует тот факт, что $\omega_1(L_2(2^m)) = \{2\}$ и без труда выводится из следующей теоремы.

Теорема 5.2. ([27]) *Пусть G – периодическая группа, для которой $\omega_1(G) = \{2\}$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $G = A < t >$, где t – инволюция, A – абелева подгруппа без инволюций и $a^t = a^{-1}$ для каждого элемента $a \in A$;

(2) G является расширением элементарной абелевой 2-группы посредством группы без инволюций;

(3) G изоморфна $L_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P характеристики два.

Для конечных групп доказательство теоремы 5.2 впервые было получено Бернсайдом в работе [41], которая оказалась на долгие годы забытой. Брауэр, Сузуки и Уолл [39] (см. также теорему XI.2.7 в [54]) передоказали этот результат Бернсайда с использованием теории исключительных характеров (доказательство Бернсайда является комбинаторным). Позднее Голдшмидт [52] нашел элементарное доказательство, которое так же, как и предыдущие, существенно использует конечность группы G.

Теорема 5.2 дает возможность указать примеры бесконечных групп, распознаваемых по спектру.

Теорема 5.3. ([27]) *Пусть P – поле, являющееся объединением возрастающей последовательности конечных полей порядков 2^{m_i}, $m_i > 1$, $i = 1, 2, \ldots$, и пусть $L = L_2(P)$. Если существует такое натуральное число s, что 2^s не делит ни одно из чисел m_i, $i = 1, 2, \ldots$, то L распознаваема по спектру, т. е. любая группа G с $\omega(G) = \omega(L)$ изоморфна L. Во всех других случаях существует бесконечно много попарно неизоморфных групп G таких, что $\omega(G) = \omega(L)$.*

Например, распознаваема по спектру группа $L_2(P)$, где P – объединение возрастающей цепи полей порядков 2^{3^i}, $i = 1, 2, \ldots$.

6. Группы с узким спектром

Очевидно, что группы с $\omega(G) = \{1, 2\}$ являются элементарными абелевыми 2-группами. Леви и ван дер Варден [57] доказали, что при условии $\omega(G) = \{1, 3\}$ группа G нильпотентна и ее ступень нильпотентности ограничена числом три. Б. Нойман [69] описал группы G с $\omega(G) = \{1, 2, 3\}$. Санов [32] и М. Холл [53] установили, что группы G, для которых $\omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ (соответственно $\omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 6\}$), локально нильпотентны. М. Нейман [70] определил строение группы G, если $\omega(G) = \{1, 2, 5\}$. Из теоремы 5.1 вытекает, что группа G с $\omega(G) = \{1, 2, 3, 5\}$ изоморфна A_5. Н. Гупта и автор [51] доказали, что группа, спектр которой является собственным подмножеством множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, либо локально конечна, либо содержит нормальную нильпотентную силовскую подгруппу S, фактор-группа по которой является 5-группой периода 5. Позднее в [55] было доказано, что и во втором случае G локально конечна, если S нетривиальна. Группы, спектр которых равен $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, описываются следующей теоремой.

Теорема 6.1. ([28]) *Пусть G – группа, для которой $\omega(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда для нее справедливо одно из утверждений:*

(1) *$G \simeq A_6$;*

(2) *$G = VC$, где V – нетривиальная элементарная абелева нормальная* 2-*подгруппа из G, а $G \simeq A_5$. Более точно, V – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп порядка* 16 *группы G, каждая из которых является естественным двумерным модулем для $SL_2(4) \simeq C$.*

В частности, G локально конечна.

Для конечных групп этот результат легко получить из классификации конечных простых групп с нильпотентными централизаторами нетривиальных элементов [94, 95].

7. Нерешенные вопросы

1. Верно ли, что конечная группа, изоспектральная простой, обладает не более чем одним неразрешимым композиционным фактором? В [62] показано, что простая группа G, изоспектральная разрешимой, может быть только одной из групп $L_3(3)$, $U_3(3)$, $S_4(3)$, A_{10}. Все указанные группы нераспознаваемы (см. табл. 3), но вопрос о существовании разрешимой группы, изоспектральной G, остается открытым для каждой из этих групп за исключением $L_3(3)$.

2. Верно ли, что знакопеременная группа A_n при $n > 10$ распознаваема? Для положительного ответа достаточно доказать квазираспознаваемость (см. [20]). Наименьшее n, для которого ответ неизвестен, равно 22.

3. Существуют ли среди групп $L_n(2), n > 2$, нераспознаваемые? В частности, распознаваема ли $L_9(2)$?

4. Верно ли, что любая конечная простая группа G с $s(G) \geq 3$ либо распознаваема, либо изоморфна A_6?

5. Распознаваема ли $L_2(7)$ по спектру в классе всех групп?

6. Верно ли, что любая группа G с $\omega(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ локально конечна?

Литература

1. Алеева М. Р. О композиционных факторах конечных групп с множеством порядков элементов как у группы $U_3(q)$ для нечетного числа q // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, № 2. С. 249–268.

2. Алеева М. Р. О конечных простых группах с множеством порядков элементов как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса // Матем. заметки. 2003. Т. 73, № 3. С. 323–339.

3. Алексеева О. А. Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп ${}^3D_4(q)$, q четно // Алгебра и логика. (В печати).

4. Алексеева О. А., Кондратьев А. С. О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов // Украин. матем. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 998–1003.

5. Алексеева О. А., Кондратьев А. С. Квазираспознаваемость одного класса конечных простых групп по множеству порядков элементов // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 241–255.

6. Алексеева О. А., Кондратьев А. С. Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп ${}^3D_4(q)$ и $F_4(q)$, q нечетно // Алгебра и логика. (В печати).

7. Буриченко В. П. Расширения абелевых 2-групп с помощью $L_2(q)$ с неприводимым действием // Там же. 2000. Т. 39, № 3. С. 280–319.

8. Васильев А. В. Распознаваемость групп $G_2(3^n)$ по порядкам их элементов // Там же. 2002. Т. 41, № 2. С. 130–142.

9. Васильев А. В. О распознавании всех конечных неабелевых простых групп, простые делители порядков которых не превосходят 13 // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 315–324.

10. Васильев А. В. О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Там же. 2005. Т. 46, № 3. С. 615–624.

11. Васильев А. В., Гречкосеева М. А. О распознаваемости конечных простых ортогональных групп размерности $2^m, 2^m+1$ и 2^m+2 над полем характеристики 2 // Там же. 2004. Т. 45, № 3. С. 510–526.

12. Васильев А. В., Гречкосеева М. А. О распознавании конечных простых линейных групп над полями характеристики 2 по спектру // Там же. (В печати).

13. Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д. и др. Распознавание конечных простых групп $F_4(2^m)$ по спектру // Там же. 2004. Т. 45, № 6. С. 1256–1262.

14. Гречкосеева М. А. Распознаваемость группы $O_{10}^+(2)$ по ее спектру // Там же. 2003. Т. 44, № 4. С. 737–741.

15. Денг Х., Лучидо М. С., Ши В. Число попарно неизоморфных конечных групп с данным множеством порядков элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 1. С. 70–82.

16. Журтов А. Х., Мазуров В. Д. О распознавании конечных простых групп $L_2(2^m)$ в классе всех групп // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 75–78.

17. Заварницин А. В. Распознавание по множеству порядков элементов симметрических групп степени r и $r+1$ для простого r // Там же. 2002. Т. 43, № 5. С. 1002–1006.

18. Заварницин А. В. Распознавание по множеству порядков элементов знакопеременных групп степени $r+1$ и $r+2$ для простого r и группы степени 16 // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 6. С. 648–661.

19. Заварницин А. В. Веса неприводимых $SL_3(q)$-модулей в характеристике определения // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 319–328.

20. Заварницин А. В., Мазуров В. Д. О порядках элементов в накрытиях симметрических и знакопеременных групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 296–315.

21. Кондратьев А. С. О компонентах графа простых чисел для конечных простых групп // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.

22. Кондратьев А. С., Мазуров В. Д. Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 360–371.

23. Мазуров В. Д. О множестве порядков элементов конечной группы // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 1. С. 81–89.

24. Мазуров В. Д. Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Там же. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.

25. Мазуров В. Д. Распознавание конечных непростых групп по множеству порядков их элементов // Там же. 1997. Т. 36, № 3. С. 304–322.

26. Мазуров В. Д. Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Там же. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.

27. Мазуров В. Д. О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Там же. 2000. Т. 39, № 1. С. 74–86.

28. Мазуров В. Д. О группах периода 60 с заданными порядками элементов // Там же. 2000. Т. 39, № 3. С. 329–346.

29. Мазуров В. Д. Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Там же. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.

30. Мазуров В. Д., Су М. Ч., Чао Х. П. Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов // Там же. 2000. Т. 39, № 5. С. 567–585.

31. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 15-е изд. Новосибирск, 2002.

32. Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для экспоненты 4 // Учен. зап. Ленингр. гос. ун-та. Сер. матем. 1940. Т. 10. С. 166–170.

33. An J. B., Shi W. J. The characterization of finite simple groups with no elements of order six // Commun. Algebra. 2000. Vol. 28, № 7. P. 3351–3358.

34. Aschbacher M., Smith S. D. The Classification of Quasithin Groups: I. Structure of Strongly Quasithin $\mathcal{K}$-groups. Amer. Math. Soc., 2004.

35. Aschbacher M., Smith S. D. The Classification of Quasithin Groups: II. Main Theorems: The Classification of Simple QTKE-groups. Amer. Math. Soc., 2004.

36. Brandl R., Shi W. J. The characterization of $PSL(2, q)$ by its element orders // J. Algebra. 1994. Vol. 163, № 1. P. 109–114.

37. Brandl R., Shi W. J. A characterization of finite simple groups with abelian Sylow 2-subgroups // Ricerche di Mat. 1993. Vol. 42, № 1. P. 193–198.

38. Brandl R., Shi W. J. Finite groups whose element orders are consecutive integers // J. Algebra. 1991. Vol. 143, № 2. P. 388–400.

39. Brauer R., Suzuki M., Wall G. E. A characterization of the one-dimensional unimodular projective groups over finite fields // Illinois J. Math. 1958. Vol. 2, № 3. P. 718–742.

40. Burkhardt R. Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen $PSL(2, p^f)$ // J. Algebra. 1976. Vol. 40, № 1. P. 75–96.

41. Burnside W. On a class of groups of finite order // Trans. Cambridge Phil. Soc. 1899. Vol. 18. P. 269–276.

42. Chen G. Y., Mazurov V. D., Shi W. J. et al. Recognition of finite almost simple groups $PGL_2(q)$ by spectrum. (To appear).

43. Chigira N., Shi W. J. More on the set of elements orders in finite groups // Northeast Math. J. 1996. Vol. 12, № 3. P. 257–260.

44. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P. et al. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1995.

45. Darafsheh M. R., Farjami Y. A quantitative characterization of the group $L_{11}(2)$ // Acta Math. Sinica. (To appear).

46. Darafsheh M. R., Moghaddamfar A. R. A characterization of some finite groups by their element orders // Algebra Colloq. 2000. Vol. 7, № 4. P. 467–476.

47. Darafsheh M. R., Moghaddamfar A. R. Characterization of the groups $PSL_5(2)$, $PSL_6(2)$, and $PSL_7(2)$ // Commun. Algebra. 2001. Vol. 29, № 1. P. 465–475. Corrigendum: Commun. Algebra. 2003. Vol. 32, № 9. P. 4651–4653.

48. Darafsheh M. R., Moghaddamfar A. R. A Characterization of groups related to the linear groups $PSL(n, 2)$, $n = 5, 6, 7, 8$ // Pure Math. Appl. 2000. Vol. 11, № 4. P. 629–637.

49. Deng H. W., Shi W. J. The characterization of Ree groups ${}^2F_4(q)$ by their element orders // J. Algebra. 1999. Vol. 217, № 1. P. 180–187.

50. Feit W., Thompson J. G. Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math. 1963. Vol. 13, № 3. P. 775–1029.

51. Gupta N. D., Mazurov V. D. On groups with small orders of elements // Bull. Austral. Math. Soc. 1999. Vol. 60. P. 197–205.

52. Goldshmidt D. Elements of order two in finite groups // Delta (Waukesha). 1974/75. Vol. 4. P. 45–58.

53. Hall M. Jr. Solution of the Burnside problem for exponent six // Illinois J. Math. 1958. Vol. 2. P. 764–786.

54. Huppert B., Blackburn N. Finite groups III. Berlin: Springer Verlag, 1982.

55. Jabara E. Fixed point free action of groups of exponent 5 // J. Austral. Math. Soc. 2004. Vol. 77. P. 297–304.

56. Jansen C., Lux K., Parker R. et al. An Atlas of Brauer characters. Oxford: Clarendon Press, 1985.

57. Levi F., van der Waerden B. L. Über eine besondere Klasse von Gruppen // Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. 1932. Vol. 9. S. 154–158.

58. Li H. L., Shi W. J. A characteristic property of some sporadic simple groups // Chinese Ann. Math. 1993. Vol. 14A, № 2. P. 144–151.

59. Lipschutz S., Shi W. J. Finite groups whose element orders do not exceed twenty // Progr. Nat. Sci. 2000. Vol. 10, № 1. P. 11–21.

60. Liu F. J. A characteristic property of projective special linear group $L_3(8)$ // J. Southwest-China Normal Univ. (N. S.). 1997. Vol. 22, № 2. P. 131–134.

61. Lucido M. S. Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1999. Vol. 102. P. 1–22.

62. Lucido M. S., Moghaddamfar A. R. Groups with complete prime graph connected components // J. Group Theory. 2004. Vol. 7, № 3. P. 373–384.

63. Mazurov V. D., Moghaddamfar A. R. Recognition of simple group $S_8(2)$ by its spectrum // Algebra Colloq. (To appear).

64. Mazurov V. D., Shi W. J. A note to the characterization of sporadic simple groups // Ibid. 1998. Vol. 5, № 3. P. 285–288.

65. Moghaddamfar A. R. On spectrum of linear groups over the binary field and recognizability of $L_{12}(2)$ // Int. J. Algebra and Comput. (To appear).

66. Moghaddamfar A. R., Pournaki M. R. Recognition of some symmetric groups by the set of the order of their elements // Acta Math. Hung. 2003. Vol. 99, № 4. P. 263–270.

67. Moghaddamfar A. R., Shi W. J. The characterization of almost simple groups $PGL(2, p)$ by their element orders // Commun. Algebra. 2004. Vol. 32, № 9. P. 3327–3338.

68. Moghaddamfar A. R., Shi W. J. The number of finite groups whose element orders is given // J. Pure Appl. Algebra. (To appear).

69. Neumann B. H. Groups whose elements have bounded orders // J. London Math. Soc. 1937. Vol. 12. P. 195–198.

70. Newman M. F. Groups of exponent dividing seventy // Math. Scientist. 1979. Vol. 4. P. 149–157.

71. Praeger C. E., Shi W. J. A characterization of some alternating and symmetric groups // Commun. Algebra. 1994. Vol. 22, № 5. P. 1507–1530.

72. Shi W. J. A new characterization of some projective special linear groups and the finite groups in which every element has prime order or order $2p$ // J. Southwest-China Teachers Univ. (N. S.). 1983. Vol. 8, № 1. P. 23–28.

73. Shi W. J. A characteristic property of $PSL_2(7)$ // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1984. Vol. 36, № 3. P. 354–356.

74. Shi W. J. A characterization of some $PSL_2(q)$ // J. Southwest-China Teachers Univ. (N. S.). 1985. Vol. 10, № 2. P. 25–32.

75. Shi W. J. A characteristic property of A_5 // Ibid. 1986. Vol. 11, № 3. P. 11–14.

76. Shi W. J. A characteristic property of A_8 // Acta Math. Sinica. New Series. 1987. Vol. 3, № 1. P. 92–96.

77. Shi W. J. A new characterization of the sporadic simple groups // Group theory. Proc. Conf. Singapore 1987. 1989. P. 531–540.

78. Shi W. J. On the simple K_3-groups // J. Southwest-China Teachers Univ. (N. S.). 1988. Vol. 13, № 1. P. 1–4.

79. Shi W. J. A characteristic property of J_1 and $PSL_2(2^n)$ // Adv. in Math. 1987. Vol. 16. P. 397–401.

80. Shi W. J. A characterization of Suzuki simple groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 114, № 3. P. 589–591.

81. Shi W. J. A characterization of some projective special linear groups // J. Math. (PRC). 1985. Vol. 5. P. 191–200.

82. Shi W. J. A characterization of the finite simple group $U_4(3)$ // Analele Univ. din Timişoara. Ser. Ştiinţe Mat. 1992. Vol. 30, № 2–3. P. 319–323.

83. Shi W. J. A characterization of $U_3(2^m)$ by their element orders // J. Southwest-China Normal Univ. (N. S.). 2000. Vol. 25, № 4. P. 353–360.

84. Shi W. J. A characterization of $U_3(9)$ // Ibid. 2002. Vol. 27, № 5. P. 633–636.

85. Shi W. J. A characteristic property of Mathieu groups // Chinese Ann. Math. 1988. Vol. 9A, № 5. P. 575–580.

86. Shi W. J. A characterization of the Conway simple group Co_2 // J. Math. (PRC). 1989. Vol. 9. P. 171–172.

87. Shi W. J. A characterization of the Higman–Sims group // Houston J. Math. 1990. Vol. 16, № 4. P. 597–602.

88. Shi W. J. The characterization of the sporadic simple groups by their element orders // Algebra Colloq. 1994. Vol. 1, № 2. P. 159–166.

89. Shi W. J., Li H. L. A characteristic property of M_{12} and $PSU(6, 2)$ // Acta Math. Sin. 1989. Vol. 32, № 6. P. 758–764.

90. Shi W. J., Lipschutz S. A new classification of finite simple groups // Proc. of the MFI'99. (To appear).

91. Shi W. J., Tang C. Y. A characterization of some orthogonal groups // Progr. Nat. Sci. 1997. Vol. 7, № 2. P. 155–162.

92. Shi W. J., Wang L. H., Wang S. H. The pure quantitative characterization of linear groups over the binary field // Chinese Annals of Math. Ser. A. 2003. Vol. 24A, № 6. P. 675–682.

93. SHI W. J., YANG W. Z. A new characterization of A_5 and finite groups in which every nonidentity element has prime order // J. Southwest-China Teachers College. Ser. B. 1984. Vol. 9, № 1. P. 36–40.

94. SUZUKI M. Finite groups with nilpotent centralizers // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 99. P. 425–470.

95. SUZUKI M. On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. (2). 1962. Vol. 75, № 1. P. 105–145.

96. SUZUKI M. On the prime graph of a finite simple group – an application of the method of Feit–Thompson–Bender–Glauberman // Groups and combinatorics – in memory of Michio Suzuki. Adv. Stud. Pure Math. 2001. Vol. 32. (Math. Soc. Japan.) P. 41–207.

97. VASILYEV A. V., VDOVIN E. P. An adjacency criterion for two vertices of the prime graph of a finite simple group // Sobolev Institute of Math. 2005. Preprint № 152.

98. WILLIAMS J. S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, № 2. P. 487–513.

99. XU M., SHI W. J. Pure quantitative characterization of finite simple groups ${}^2D_n(q)$ and $D_l(q)$ (l odd) // Algebra Colloq. 2003. Vol. 10, № 3. P. 427–443.

100. ZAVARNITSINE A. V. Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders // J. Group Theory. 2004. Vol. 7, № 1. P. 81–97.

101. ZOKAYI A. R., MOGHADDAMFAR A. R., KHADEMI M. A characterization of the finite simple group $L_{11}(2)$ by its element orders // Taiwanese J. Math. (To appear).

Статья поступила 22.11.2004 г.